令和 6 年度
一般選抜（前期日程）・特別選抜（社会人・帰国生徒・外国人留学生）
「数学」解答例

第 1 問

(1) α を $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させせることは，α と複素数 $\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ の積をとることを意味する。したがって，

$$\beta=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\alpha=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\underline{i}$$

である。

(2) $\triangle\mathrm{OAB}$ の重心を表す複素数を γ とすると，

$$\gamma=\frac{1}{3}(0+\alpha+\beta)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

γ_n は γ に対し $\dfrac{\pi}{3}$ だけの回転を n 回繰り返して得られる点を表す複素数なので，

$$\gamma_n=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^n\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}=\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{n+1}}$$

となる。

(3) (2) とド・モアブルの定理より，

$$\gamma_{100}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{101}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{101\pi}{3}+i\sin\frac{101\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}i$$

線分 AG_{100} に対して，外分点を算出する公式を適用すると，外分点を表す複素数は，

$$\frac{1}{3-1}\left\{-1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+3\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}i\right)\right\}=\underline{-i}$$

となる。

(4) $\triangle\mathrm{OAB}$ は，

$$|\mathrm{OA}|=|\alpha|=1,\quad |\mathrm{OB}|=|\beta|=1,\quad \angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$$

より正三角形であるため，これを回転した $\triangle\mathrm{OA}_{100}\mathrm{B}_{100}$ も正三角形である。したがって，外接円の中心は $\triangle\mathrm{OA}_{100}\mathrm{B}_{100}$ の重心 γ_{100} であり，半径は $|\gamma_{100}|$ である。(3) の計算から，$\gamma_{100}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}-\dfrac{1}{2}i$ であり，$|\gamma_{100}|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ である。したがって，$\triangle\mathrm{OA}_{100}\mathrm{B}_{100}$ に外接する円上の点 z が満たす方程式は，

$$\underline{\left|z-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}i\right)\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

となる。

第2問

ゲーム1をはじめて，さいころを投げる操作ちょうど n 回で「ゲーム1の勝者」が決まり，さらにゲーム2をはじめて，さいころを投げる操作ちょうど m 回で「ゲーム2の勝者」が決まる確率を $p(n,m)$ とおく。

(1) $n+m=5$ の場合を考えることになるので，(n,m) として $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$ の4通りを考えれば良い。

$$p(1,4)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4,\qquad p(2,3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3,$$
$$p(3,2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2,\quad p(4,1)=\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

より，求める確率は，

$$\begin{aligned}p(1,4)+p(2,3)+p(3,2)+p(4,1)&=\frac{1}{3\cdot 2^4}+\frac{1}{3^2\cdot 2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{2^2}{3^4}\\&=\frac{1}{3^4\cdot 2^4}(3^3+3^2\cdot 2^2+3\cdot 2^4+2^6)\\&=\frac{1}{3^4\cdot 2^4}(27+36+48+64)\\&=\underline{\frac{175}{1296}}\end{aligned}$$

となる。

(2) $n+m=10$ の場合を考えるが，そのうち「ゲーム2の勝者」がCである場合のみを考えると，(n,m) は $(2,8),(4,6),(5,5)$ の3通りに限られる。これらの「ゲーム1の勝者」はそれぞれB, D, Aであるので，$p(2,8)=P_{\mathrm{B}},p(4,6)=P_{\mathrm{D}},p(5,5)=P_{\mathrm{A}}$ と書いておく。これらは，

$$P_{\mathrm{A}}=\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5,\quad P_{\mathrm{B}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8,\quad P_{\mathrm{D}}=\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

となる。求める確率はこれらの和であり，

$$\begin{aligned}P_{\mathrm{A}}+P_{\mathrm{B}}+P_{\mathrm{D}}&=\frac{1}{3^5\cdot 2}+\frac{1}{3^2\cdot 2^7}+\frac{1}{3^4\cdot 2^3}\\&=\frac{1}{3^5\cdot 2^7}(2^6+3^3+3\cdot 2^4)\\&=\frac{1}{3^5\cdot 2^7}(64+27+48)\\&=\underline{\frac{139}{31104}}\end{aligned}$$

となる。

(3) (2) と条件付き確率の定義より，さいころを投げる操作ちょうど10回で「ゲーム2の勝者」がCに決まったとき，Aが「ゲーム1の勝者」となる条件付き確率は，

$$\frac{P_{\mathrm{A}}}{P_{\mathrm{A}}+P_{\mathrm{B}}+P_{\mathrm{D}}}=\frac{\frac{64}{3^5\cdot 2^7}}{\frac{139}{3^5\cdot 2^7}}=\underline{\frac{64}{139}}$$

である。

第 3 問

(1) 三角関数および合成関数の微分法を用いると，

$$\begin{aligned}
\frac{dx_n}{dt} &= -(n+1)\sin t - (n+1)\sin\big((n+1)t\big) = \underline{-(n+1)\left\{\sin t + \sin\big((n+1)t\big)\right\}} \\
\frac{dy_n}{dt} &= (n+1)\cos t - (n+1)\cos\big((n+1)t\big) = \underline{(n+1)\left\{\cos t - \cos\big((n+1)t\big)\right\}}
\end{aligned}$$

となる。

(2) (1) の結果より，

$$\begin{aligned}
x_n\frac{dy_n}{dt} &= (n+1)\left\{(n+1)\cos^2 t - n\cos t\cos\big((n+1)t\big) - \cos^2\big((n+1)t\big)\right\} \\
y_n\frac{dx_n}{dt} &= -(n+1)\left\{(n+1)\sin^2 t + n\sin t\sin\big((n+1)t\big) - \sin^2\big((n+1)t\big)\right\}
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
x_n\frac{dy_n}{dt} - y_n\frac{dx_n}{dt} &= (n+1)\left[(n+1) - n\left\{\cos t\cos\big((n+1)t\big) - \sin t\sin\big((n+1)t\big)\right\} - 1\right] \\
&= n(n+1)\left\{1 - \cos\big((n+2)t\big)\right\}
\end{aligned}$$

したがって，

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{n+2}}\left\{1-\cos\big((n+2)t\big)\right\}dt = \frac{n(n+1)}{2}\left[t - \frac{\sin\big((n+2)t\big)}{n+2}\right]_0^{\frac{2\pi}{n+2}} = \underline{\frac{\pi n(n+1)}{n+2}}$$

である。

(3) (1) の結果より，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_n}{dt}\right)^2 &= (n+1)^2\left[\left\{\sin t + \sin\big((n+1)t\big)\right\}^2 + \left\{\cos t - \cos\big((n+1)t\big)\right\}^2\right] \\
&= (n+1)^2\left\{\sin^2 t + 2\sin t\sin\big((n+1)t\big) + \sin^2\big((n+1)t\big)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \cos^2 t - 2\cos t\cos\big((n+1)t\big) + \cos^2\big((n+1)t\big)\right\} \\
&= 2(n+1)^2\left\{1-\cos\big((n+2)t\big)\right\} = 4(n+1)^2\sin^2\left(\frac{n+2}{2}t\right)
\end{aligned}$$

ここで，$0 \leqq \dfrac{n+2}{2}t \leqq \dfrac{n+2}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{n+2} = \pi$ であることから，$\sin\left(\dfrac{n+2}{2}t\right) \geqq 0$ となるので，

$$\begin{aligned}
L_n &= \int_0^{\frac{2\pi}{n+2}}\sqrt{\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_n}{dt}\right)^2}\,dt = 2(n+1)\int_0^{\frac{2\pi}{n+2}}\sin\left(\frac{n+2}{2}t\right)dt \\
&= 2(n+1)\left[-\frac{2}{n+2}\cos\left(\frac{n+2}{2}t\right)\right]_0^{\frac{2\pi}{n+2}} = \underline{\frac{8(n+1)}{n+2}}
\end{aligned}$$

である。

(4) (2), (3) の結果より，

$$\frac{S_k}{L_k} = \frac{\pi k(k+1)}{k+2}\cdot\frac{k+2}{8(k+1)} = k\cdot\frac{\pi}{8} \qquad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

よって，

$$a_n = \frac{1}{n!}\left(1\cdot\frac{\pi}{8}\right)\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)\cdots\left(n\cdot\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{n!}\cdot n!\cdot\left(\frac{\pi}{8}\right)^n = \left(\frac{\pi}{8}\right)^n$$

$\{a_n\}$ は初項 $a_1 = \dfrac{\pi}{8}$，公比 $\dfrac{\pi}{8}$ の等比数列であり，また $\left|\dfrac{\pi}{8}\right| < 1$ であることから，無限級数は収束し，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\pi/8}{1-\pi/8} = \underline{\frac{\pi}{8-\pi}}$$

である。